

Juhász Tibor

Matematikát, fizikát és  
informatikát oktatók  
XXXVIII. országos  
konferenciája  
2014. augusztus 25-27.  
Pécs  
Összefoglaló



Eszterházy Károly Főiskola  
Matematikai és Informatikai Intézet

Juhász Tibor

Matematikát, fizikát és  
informatikát oktatók  
XXXVIII. országos  
konferenciája  
2014. augusztus 25-27.  
Pécs  
Összefoglaló



Eger, 2014

Készült a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 Nemzeti Kiválóság Program című kiemelt projekt keretében. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség  
[www.ujszecsenyiterv.gov.hu](http://www.ujszecsenyiterv.gov.hu)  
06 40 638 638



MAGYARORSZÁG MEGÚJUL



A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

# Tartalomjegyzék

1. Díszítések és minták a tudományban és művészetben	5
2. Irracionális számok és bizonyítási módszerek a közoktatásban	5
3. Variációk egy téglalagra	6
4. Frémek Hilbert térben	6
5. Résztörtekre bontás egy gyorsabb módszere	7
6. A sorok tanításáról a gazdaságtudományi alapképzésben	7
7. A Hölder-egyenlőtlenség néhány következménye	7
8. Matematikai tehetséggondozás Maple T.A.-val	8
9. Számítógéppel támogatott módszerek	8
10. Hány részcsoportja van egy véges Abel-csoportnak?	9

## A konferenciáról

Az immáron 38. alkalommal megrendezett Matematikát, fizikát és informatikát oktatók konferenciája ezévben Pécsen, a Pécsi Tudományegyetem Pollack Mihály Műszaki és Informatikai Karán került megrendezésre, 2014. augusztus 25. és 27. között. A konferencia célja annak elősegítésére, hogy a felsőoktatási intézmények oktatói és kutatói a matematika, a fizika és az informatika korszerű és hatékony oktatásáról és kutatásáról tudományos előadások, poszterbemutatók és személyes találkozás révén tapasztalatot cserélhessenek.

A hétfői napon a dékáni köszöntőt követően négy plenáris előadást tekinthetünk meg, kedden délelőtt pedig párhuzamosan, 3 szekcióban (Fizika, Informatika, Matematika) zajlottak az előadások. Szerdán délelőtt három szekcióban hallhatunk matematika előadásokat, majd három plenáris előadással zárult a rendezvény.

A konferencia weblapja: <http://mafiok2014.pmmik.pte.hu/hu/>

# 1. Díszítések és minták a tudományban és művészetben

Szerző: Molnár Emil

Az előadás Escher munkái, vagy ha úgy tetszik, a síkbeli szimmetriacsoportok által motiválva a térkitöltésről (kövezés) szólt, azon belül a térkitöltések algebrai osztályozásának egy lehetőségéről. A módszer alapja a kövezés szimplex kövezésekre bontása, és a különböző szimplexek egymással való viszonyának közös diagramon való ábrázolása, majd annak egy mátrix-függvénnyel való finomítása. Ezzel a módszerrel a kövezések topologikusan leírhatók. Az elmélet minden kövezéshez egy úgynevezett  $D$ -szimbólumot rendel (az elnevezés B.N. Delone, M.S. Delaney és W.M. Dress neveinek közös kezdőbetűjét őrzi). Kérdés az is, hogy megfordítható-e ez a hozzárendelés, azaz minden  $D$ -szimbólumhoz valamilyen  $d$ -dimenziós tér alkalmas kövezése-e.

A témához gazdag anyagot találhatunk a <http://www.math.bme.hu/~boroczki/D-symbol/> címen.

# 2. Irracionális számok és bizonyítási módszerek a közoktatásban

Szerző: Vigné Lencsés Ágnes

A középiskolában az irracionális számok oktatása általában nem kielégítő, többnyire csak a  $\sqrt{2}$  irracionális voltának bizonyítása hangzik el. Az előadáson olyan középiskolásoknak célzott feladatok történtek kitűzésre, amely segítségével különböző anyagrészeknél megerősíthető az irracionális számok fogalma. Ezek közül néhány:

1. Igazoljuk, hogy ha  $a \in \mathbb{N}$  és  $a$  nem négyzetszám, akkor  $\sqrt{a}$  irracionális!
2. Bizonyítsuk be, hogy  $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$  irracionális!
3. Adott két „végtelen nagy” térfogatú hordó, mindegyikben víz van. Egy  $2 - \sqrt{2}$  és egy  $\sqrt{2}$  literes edénnyel át lehet-e merni egyikből a másikba pontosan egy litert?
4. Mutassuk meg, hogy  $\log_2 3$ ,  $\lg 3 + \lg 5$  irracionálisak!
5. Bizonyítsuk be, hogy  $\sin \frac{\pi}{18}$  irracionális!

6. Igazoljuk, hogy ha  $\sin x$  irracionális, akkor  $\sin 3x$  is az!
7. Lehetnek-e ugyanazon számtani sorozat elemei a  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  és  $\sqrt{5}$ ?
8. Mutassuk meg, hogy ha egy számtani sorozatnak van két irracionális eleme, akkor csak legfeljebb egy racionális eleme lehet!
9. Mutassuk meg, hogy egy körbe írt négyzet csúcsainak a kör egy pontjától való távolságai között mindig van irracionális!

### 3. Variációk egy téglalpra

Szerző: Szabolcsi Sámuel

Az előadás a klasszikus értelemben vett origami (formák létrehozása négyzet alakú papírból kiindulva, tépés és ragasztás nélkül) lehetőségeit vizsgálja. Sokkal inkább részletgazdag formákat készíthetünk az úgynevezett hajtásháló (Create Pattern) alkalmazásával, ami tulajdonképpen az elkészült modell kiterítve. Ezzel kapcsolatban a következő kérdések merülhetnek fel: adott hajtásháló alapján mindig összeállítható-e értelmes alakzat, illetve a hajtások sorrendiségének ismerete hiányában hányféle megoldás létezik? A folyamat meg is fordítható: készítsünk adott modellhez CP-t! Itt gráfelméleti kérdések, és a körpakolási probléma jön szóba.

### 4. Frémek Hilbert térben

Szerző: Kovács István Béla

Az alapprobléma az, hogy egy függvényt egy hozzárendelt számsorozat minél kevesebb pontjának felhasználásával minél pontosabban szeretnénk reprezentálni. A frémek trigonometrikus rendszert helyettesítő függvénycsaládok, függvényekből álló sorozatok. Az előadásból kiderül, hogyan lehet már meglévő frémekből újabbakat előállítani, továbbá Casazza egy tételének, miszerint minden frém előáll három ortonormált bázis lineáris kombinációjaként, láthattunk egy rövid, alternatív bizonyítását, melynek megértéséhez a funkcionálanalízis bevezető előadásai anyagának ismerete is elegendő.



## 5. Rész törtre bontás egy gyorsabb módszere

### A „tilos értékek” alkalmazása

Szerző: Körtesi Péter

A rész törtre (vagy parciális törtre) bontás fontos segédeszköz a matematikában, például a racionális törtfüggvények integrálásánál. Egy adott példán végignéztük, hogyan szoktuk a parciális törtre bontást általában elvégezni, ami meglehetősen sok számolással jár. A rész tört számlálóját alkotó polinomok együtthatói egy lineáris egyenletrendszer megoldásaként adódnak. Erre láthattunk egy alternatív lehetőséget: a

$$\frac{6}{(x+3)(x+1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1}$$

felbontás esetén, szorozzuk meg mindkét oldalt  $(x+3)$ -mal:

$$\frac{6}{x+1} = A + (x+3)\frac{B}{x+1},$$

majd helyettesítsük  $x$  helyére  $-3$ -at („tilos érték” – az értelmezési tartományon kívüli érték):  $-3 = A$ . Hasonlóan kaphatjuk meg  $B$  értékét is.

## 6. A sorok tanításáról a gazdaságtudományi alapképzésben

Szerző: Klingné Takács Anna

Az előadáson az Excel és a Geogebra és a Maple alkalmazási lehetőségei kerültek bemutatásra a valós sorok összegének kiszámítására. Lényegében az első két szoftver a részletösszegek sorozatának diagramon történő ábrázolására, majd arról az összeg megsejtésére tudják használni. A Maple az összeg kiszámítására is képes. A hallgatók ezen módszernek köszönhetően jobban teljesítenek, több sikerélményben van részüik.

## 7. A Hölder-egyenlőtlenség néhány következménye

Szerző: Horváth Gábor

Van olyan jelenség, amikor egy egyenlőtlenség finomítását megkaphatjuk ma-

gából az egyenlőtlenségből alkalmas helyettesítésekkel. Például, a

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

speciális esete a Young-egyenlőtlenségnek, melynek az

$$ab \leq \left( \frac{a+b}{2} \right)^2$$

egyenlőtlenség egy finomítása. Az utóbbi megkapható az előzőből  $a = \sqrt{a} \sqrt[4]{ab}$ ,  $b = \sqrt{b} \sqrt[4]{ab}$  helyettesítéssel. A szerző azt igazolta, hogy a Hölder-egyenlőtlenség Aldaz-féle finomítása is megkapható hasonló módon a Hölder-egyenlőtlenségből.

## 8. Matematikai tehetséggondozás Maple T.A.-val

Szerző: Maróti György

Tűzzünk ki egy feladatot, majd kérjük be elektronikusan a megoldást. Ha ezt automatikusan ki szeretnénk értékelni, többnyire bajban vagyunk, hiszen nem biztos, hogy a hallgató pont ugyanolyan alakban adta meg az egyébként helyes megoldását, amilyenben a rendszer elvárja. A Maple T.A. motor lényege, hogy a Maple segítségével a kapott megoldást össze tudja vetni a tárolt jó megoldással, és csak akkor fogadja el, ha a kettő az ekvivalens. Ez a lehetőség új kapukat nyit az elektronikus vizsgáztatásban.

## 9. Számítógéppel támogatott módszerek

Szerző: Baják Szabolcs

Az  $x$  és  $y$  pozitív számok Gini-közepe alatt a

$$G_{p,q}(x,y) = \left( \frac{x^p + y^p}{x^q + y^q} \right)^{\frac{1}{p-q}},$$

ahol  $p \neq q$ , valamint  $(p-q)pq(x-y) \neq 0$  esetén a Stolarsky-közepük

$$S_{p,q}(x,y) = \left( \frac{q(x^p - y^p)}{p(x^q - y^q)} \right)^{\frac{1}{p-q}}.$$

Az előadásban arra láthattunk példát, hogy hogyan alkalmazható a Maple a fenti

két középre vonatkozó invariancia egyenletekre. Ez egy különösen nagy számítási kapacitást igénylő probléma.

## 10. Hány részcsoporthja van egy véges Abel-csoportnak?

Szerző: Tóth László

Azt a kérdést, hogy hány részhalmaza van egy véges halmaznak, már általános iskolában is meg tudjuk válaszolni. Azonban a címben feltett kérdés sokkal komplikáltabb, mivel a csoport rendje nem határozza meg a részcsoporthok számát. Legyen  $\mathbb{Z}_m$  az egész számok maradékosztályainak csoportját modulo  $m$ , jelöljék továbbá  $s(m, n)$  és  $c(m, n)$  rendre a  $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$  csoport összes, illetve ciklikus részcsoporthjainak számát. A előadásban asszimptotikus közelítéseket láthattunk a  $\sum_{m, n \leq x} s(m, m)$  és  $\sum_{m, n \leq x} c(m, m)$  összegekre.