0.1 B-spline felület

Ebben a pontban a B-spline felületet definiáljuk, mivel további kutatásaink szempontjából a geometria tervezésnél a legnépszerűbb NURBS felületekkel törődünk. Kindulásként tekintsük a következő felületek osztályát

$$\mathbf{s}(u,v) = \mathbf{M}(u)\mathbf{g}(v), u \in [u_0, u_1], v \in [v_0, v_1],$$

ahol $\mathbf{g}(v)$ egy tetszőleges görbe, $\mathbf{M}(u)$ pedig egy 4×4-es mátrix. Az így kapott felület nem más, mint az u paramétertől függő egyparaméteres görbesereg által súrolt felület. A $\mathbf{g}(v)$ görbe térbeli mozgása során egy felületet ír le. Megengedett, hogy a görbe alakja is változzon a mozgás során. Pontosan az utóbbi tulajdonsággal származtatható Bézier és B-spline felület is.

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ kontrollpontjával adott B-spline görbét mozgatjuk, úgy, hogy feltételezzük, hogy a B-spline görbe kontrollpontjai ugyancsak B-spline görbén mozognak. Jelöljük $\mathbf{b}_{ij}$-vel az $\mathbf{a}_i$ kontrollpontok pályáját meghatározó B-spline görbe kontrollpontjait $j = 0, 1, \ldots, m$, azaz $\mathbf{b}_{i0} = \mathbf{a}_i$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Ebben az esetben a mozgó B-spline görbe

$$\mathbf{a}(u) = \sum_{i=0} \mathbf{a}_i N_i^{k_1}(u),$$

amelynek kontrollpontjai az

$$\mathbf{a}_i(v) = \sum_{j=0} \mathbf{b}_{ij} N_j^{k_2}(v)$$

B-spline görbén mozognak. A két alakot kombinálva a következő felületet kapjuk:

$$\mathbf{s}(u,v) = \sum_{i=0} \left(\sum_{j=0} N_j^{k_2}(v) \right) N_i^{k_1}(u) = \sum_{i=0} \sum_{j=0} \mathbf{b}_{ij} N_i^{k_1}(u) N_j^{k_2}(v).$$

Ezt a felületet B-spline felületnek, vagy tenzori szorzattal előállított B-spline felületnek nevezzük. A $\mathbf{b}_{ij}$ pontokat a felület kontrollpontjainak, az általuk meghatározott hálót pedig kontrollhálónak nevezzük. Megjegyezzük, hogy az előbbihez hasonlóan más görbék tenzori szorzataként is származtathatunk felületet. Az

$$\mathbf{s}(u,v) = \sum_{i=0} \sum_{j=0} \mathbf{b}_{ij} F_i(u) G_j(v)$$

felület tenzori szorzattal előállított felület (tensor product surface), ahol a $F_i(u)$ és a $G_j(v)$ különböző bázisfüggvények, például Bézier felület esetén Bernstein polinomok, de lehetnek például Lagrange, racionális Bézier vagy racionális B-spline alapfüggvények is.

Beziér-felület Ebben a pontban a Beziér-felületet definiáljuk. Kindulásként tekintsük a következő felületek osztályát

$$\mathbf{s}(u,v) = \mathbf{M}(u)\mathbf{g}(v), u \in [u_0, u_1], v \in [v_0, v_1],$$

ahol $\mathbf{g}(v)$ egy tetszőleges görbe, $\mathbf{M}(u)$ pedig egy 4×4-es mátrix. Az így kapott felület nem más, mint az u paramétertől függő egyparaméteres görbesereg által súrolt felület. A $\mathbf{g}(v)$ görbe térbeli mozgása során egy felületet ír le. Megengedett, hogy a görbe alakja is változzon a mozgás során. Pontosan az utóbbi tulajdonsággal származtatható Bézier és B-spline felület is.

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ kontrollpontjával adott Bézier-görbét mozgatjuk, úgy, hogy feltételezzük, hogy a Bézier-görbe kontrollpontjai ugyancsak Bézier-görbén mozognak. Jelöljük $\mathbf{b}_{ij}$-vel az $\mathbf{a}_i$ kontrollpontok pályáját meghatározó Bézier–görbe kontrollpontjait $j = 0, 1, \ldots, m$, azaz $\mathbf{b}_{i0} = \mathbf{a}_i$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Ebben az esetben a mozgó Bézier-görbe

$$\mathbf{a}(u) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{a}_i B_i^n(u),$$

amelynek kontrollpontjai az

$$\mathbf{a}_i(v) = \sum_{j=0}^{m} \mathbf{b}_{ij} B_j^m(v)$$

Bézier-görbén mozognak. A két alakot kombinálva a következő felületet kapjuk:

$$\mathbf{s}(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} \mathbf{b}_{ij} B_j^m(v) \right) B_i^n(u) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \mathbf{b}_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v),$$

ahol $u \in [0,1]$, $v \in [0,1]$. Ezt a felületet Bézier-felületnek, vagy tenzori szorzattal előállított Bézier-felületnek nevezzük. A $\mathbf{b}_{ij}$ pontokat a felület kontrollpontjainak, az általuk meghatározott hálót pedig kontrollhálónak nevezzük. Megjegyezzük, hogy az elöbbihez hasonlóan más görbék tenzori szorzataként is származtathatunk felületet. Az

$$\mathbf{s}(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \mathbf{b}_{ij} F_i(u) G_j(v)$$

felület tenzori szorzattal előállított felület (tensor product surface), ahol a $F_i(u)$ és a $G_j(v)$ különböző bázisfüggvények, például Bézier felület esetén Bernstein polinomok, de lehetnek például Lagrange, racionális Bézier vagy racionális B-spline alapfüggvények is.