INFORMATIKA LOGIKAI ALAPJAI JEGYZET

KÉSZÍTETTE: CSENGERI ISTVÁN PTI

SALGÓTARJÁN 2009

A jegyzetben előforduló angol szavak illetve kifejezések tárgymutatója

Nulladrendű matematikai logika

1.1 Matematikai Logika = mat.log = symbolic logic

A **formális logika**, vagy más néven **szimbolikus logika** a logika tudományának egy ága, az okok és következmények struktúrájával foglalkozik. A formális logika az elméletek közötti kapcsolatokat elemzi, és lehetőséget ad az állítások bizonyításainak elkészítéséhez. Az elméletek alaposan definiáltak, és az állítások nagyon pontos, tömör és egyértelmű szimbolikus formában (jelölésrendszerrel) kerülnek leírásra.

1.2 Kijelentések

A kijelentés (ítélet vagy állítás) olyan jól meghatározott dologra vonatkozó kijelentő mondat, amely vagy igaz, vagy hamis, de nem lehet egy időben igaz is és hamis is.

Például: „SÜT A NAP" a probléma, hogy valós nyelven van.
Rendeljük a kijelentést az „S" szimbólumhoz.
Mat.log nyelven: **S ← „SÜT A NAP"**
Egy másik kijelentés előnyelven: „ELMEGYEK A STRANDRA" ezt rendeljük „E" szimbólumhoz.
Mat.log nyelven: **E ← ELMEGYEK A STRANDRA"**
Fogalmazzunk meg egy mondatot matematikai logikai nyelven:
Használjuk a következő szimbólumot mondatunk leírása során: ⇒ ez az előnyelven a **HA..AKKOR** kifejezésnek felel meg.
Mat.log nyelven **S⇒E** előnyelvi jelentése: „HA SÜT A NAP, AKKOR ELMEGYEK A STRADRA"
Egy újabb szimbólum felhasználásával **„∧"** amely az élőnyelvben **„ÉS"** szónak feltehető meg leírunk egy újabb mondatot matematikai logikai nyelven.
Mat.log nyelven: **S∧E** előnyelvi jelentése **„SÜT A NAP, ÉS ELMEGYEK A STRANDRA"**

Kijelentés	→	**IGAZ, I, TRUE, 1**
	→	**HAMIS, N, FALSE, 0**

A matematikai logikában nincs értelmezve az idő fogalma.

1.3 Formalizált nyelv: szintaxis és szemantika

A **szintaxis** vagy magyarul **mondattan** a nyelvészetben a szavak szószerkezetekké és mondatokká kapcsolódásának szabályait írja le. A szintaxis meghatározza a nyelv tágabb értelem vett ábécéjét, a használható szavakat – ez a nyelv kulcsszókészlete –, és megadja a nyelvi elemek felépítési szabályait.

- Jelkészlet pl:f,A,☎,🖮
- Hogyan jöhetnek egymás után a szimbólumok

A **szemantika** vagy magyarul **jelentéstan** a nyelvészet egyik részterülete, amely a nyelvi formák (szavak, szimbólumok stb.) jelentésével illetve jelentésváltozásaival foglalkozik. A generatív nyelvészet megjelenése óta a mondatjelentést is vizsgálja.

$X \leftarrow 5$ A logikában, ha kimondtam, hogy 5, akkor mindig 5 marad, ellentétben a programozással, ahol X=5, majd X=X+1 az-az X már 6-os értéket jelenti.

1.4 Behelyettesítés / Substitution /

A behelyettesítés az-az a modellezés biztosítja a matematikai logika erejét.

Valósággal fogalakozó tudományok Fizika, Kémia, Biológia		Modellezéssel foglalkozó tudományok Matematika, logika

Modellezzük a valóságot

Valós probléma A valóság részletes és folytonos Építsünk egy tornyot vasrudakból	→	**Modellezett probléma** Absztrakt probléma Szimbólum: ⌖
↓		↓
Valóságban megoldott probléma Felépült a torony		Modellen belül megoldott probléma

Mi biztosítja, hogy nem fog összedőlni a torony? **A valóság és a logika követi egymást**.

A logika lehet kétértékű, háromértékű vagy sokértékű.

Kétértékű logika:
Két értéke az igaz, és a hamis (true, false)
Eldöntendő kérdésekre ad választ.

Háromértékű logika (Temporal logic):
Három értéke: igaz, hamis, ismeretlen / true, false, unknown /
Jövőbeli kérdésekre ad választ.

Sokértékű logika (Many-valued logic):
Valószínűség kifejezésére használatos.

A feladatot értsük meg, a szemantika szintjén majd lépjünk vissza a szintaxis szintjére.

A kijelentés fogalma után bemutatott példában láthattuk, hogy a kijelentéseinket szimbólumokhoz rendeltük, és mondat alkotáskor a betűjelek közé logikai függvényt szimbolizáló jelek kerültek. Pl:$\mathbf{S \Rightarrow E}$

Azt a függvényt, amely a betűkkel jelölt változókhoz hozzárendeli a lehetséges igazságértékek valamelyikét, **interpretációnak** vagy univerzumnak hívjuk.

1.5 ATOMI FORMULA, ATOM

DEF(ATOMI FORMULA, ATOM):AZT MONDJUK, HOGY AZ **„A”** SZIMBÓLUM ATOMI FORMULA VAGY ATOM, AKKOR ÉS CSAK AKKOR, HA **„A”** EGY KEJELNTÉST JELÖL. / Atomic formulas or atoms /

ATOM(A): ⇔ A ← KIJELENTÉS
↑ ↑
Mit definiálunk A szabály

2 A nulladrendű matematikai logika szintaxisa

DEF(**JÓL FORMÁZOTT FORMULA, FORMULA**):AZT MONDJUK, HOGY AZ „F” SZIMBÓLUM JÓL FORMÁZOTT FORMULA, VAGY RÖVIDEN FORMULA 0.RENDŰ MATEMATIKAI LOGIKÁBAN, AKKOR ÉS CSAK AKKOR, HA „A” ÉS „B” FORMULÁK ÉS „F” A KÖVETKEZŐ ALAKOK KÖZÜL AZ EGYIKET VISELI, ÉS MINDEN FORMULA A FENTI SZABÁLYOK VÉGES SOKSZORI ALKALMAZÁSÁVAL ÁLL ELŐ. */ Well-formed formulas or formulas /*

REKURZÍV ÁG
(¬A), // NEM A
(A∧B), // A ÉS B
(A∨B), // A VAGY B
(A⇒B), // A –BÓL KÖVETKEZIK B, VAGY HA A AKKOR B
(A⇔B), // A AKKOR ÉS CSAK AKKOR B

NEM REKURZÍV
VAGY **F** ATOMI FORMULA

FORMULA(F):⇔ FORMULA=(A) ∧ FORMULA=(B) ∨
(FORMULA=(¬A) ∨
FORMULA=(A∧B) ∨
FORMULA=(A∨B) ∨
FORMULA=(A⇒B) ∨
FORMULA=(A⇔B)) ∨ ATOM(F)

Rekurzív definíciót a matematika csak akkor enged meg, ha van legalább egy olyan ága, amely nem rekurzív, és minden rekurzíveset visszavezet a nem rekurzív ágra.

2.1 Logikai összekötő jelek / Logical connectives /

- Egyváltozós jel:
¬ negáció

- Kétváltozós műveleti jelek:

SZIMBÓLUM	MAGYAR MEGNEVEZÉS	IDEGEN MEGNEVEZÉS
$\wedge$	ÉS	KONJUNKCIÓ
$\vee$	VAGY	DISZJUNKCIÓ
$\Rightarrow$	HA..AKKOR	IMPLIKÁCIÓ
$\Leftrightarrow$	AKKOR ÉS CSAK AKKOR	EKVIVALENCIA

2.2 LOGIKA JELEK SZEMANTIKÁJA

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	AXB
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0

Az **implikáció akkor** és csak akkor **hamis**, **ha** az **előtagja igaz**, **az utótagja hamis**.
Az **ekvivalencia akkor** és csak akkor **igaz**, **ha A és B igazságértéke egyforma**.

2.3 Kifejezés fa

Példa:

S⇒E ⇒

↓ ↓

S E

Példa:

T←VAN KEDVEM TANULNI

Ö←ÖTÖSÖM LESZ MAT.LOGBÓL

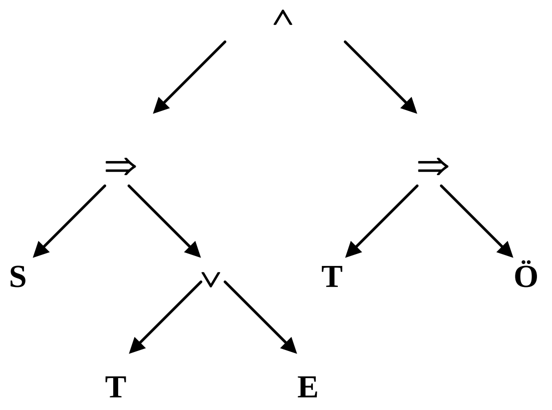
S⇒ (T∨E) ∧ (T⇒Ö)

↑

Legkülső logikai összekötő jel. (OUTERMOST CONNECTIVE)

Kifejezés baloldala:

S⇒ (T∨E)



2.4 Logika és programozás megfeleltetése

Logika	**Programozás**
IGEN	TRUE
NEM	FALSE
∧	&&
∨	||
¬	!
⇒	IF(LOGIKA KIF){….}ELSE{…}
A(ATOM)	A bool típusú változó
A⇔B	A=B
FORMULA	Logikai kifejezés

2.5 Teljesen zárójelezett formula

Példák:
$((S\Rightarrow(T\vee E)) \wedge (T\Rightarrow Ö))$
$(S\Rightarrow(T\vee E)) \wedge (T\Rightarrow Ö)$

Precedencia	műveletek kiértékelési sorrendje
$\neg$	1.
$\wedge,\vee$	2.
$\Rightarrow$	3.
$\Leftrightarrow$	4.

2.6 INTERPETÁCIÓ

DEF(**INTERPETÁCIÓ**): AZT MONDJUK, HOGY AZ **„I”** SZIMBÓLUM EGY INTERPETÁCIÓ AKKOR ÉS CSAK AKKOR, HA **„I”** MINDEN ATOMHOZ AZ IGAZ VAGY A HAMIS ÉRTÉKET RENDELI, DE CSAK AZ EGYIKET.

DEF(**INTERPETÁCIÓ**): AZT MONDJUK, HOGY „I” SZIMBÓLUM AZ „**F**” FORMULA INTERPETÁCIÓJA AKKOR ÉS CSAK AKKOR HA „I” AZ „F” MINDEN ATOMJÁHOZ AZ IGAZ VAGY A HAMIS ÉRTÉKÉT RENDELJÜK, DE CSAK AZ EGYIKET.

Kiértékelés: $Fi(1\Rightarrow 0\vee 1)=1$ Az „Fi”ebben az interpretációban igaz.
$F(S\Rightarrow T\vee E)$ $I(S\leftarrow 1, T\leftarrow 0, E\leftarrow 1)$

2.7 Logikai törvény

DEF(**LOGIKA TÖRVÉNY, TAUTOLOGIA**): AZT MONDJUK, HOGY AZ „**F**” FORMULA LOGIKAI TÖRVÉNY VAGY MÁS NÉVEN TAUTOLÓGIA AKKOR ÉS CSAK AKKOR, HA „F” MINDEN INTERPETÁCIJÁBAN IGAZ.

Példa:
$(A\Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A\vee B)$

A kifejezés igazság táblája:

A	$\Rightarrow$	B	$\Leftrightarrow$	$\neg$	A	$\vee$	B
0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1

DEF(**LOGIKAI ELLENTMONDÁS**): AZT MONDJUK, HOGY AZ „**F**” FORMULA LOGIKAI ELLENTMONDÁS, AKKOR ÉS CSAK AKKOR, HA MINDEN INTERPETÁCIÓBAN HAMIS.

<u>DEF</u>(**KIELÉGÍTHETŐ FORMULA**): AZT MONDJUK, HOGY AZ „**F**” FORMULA KIELÉGÍTHETŐ, AKKOR ÉS CSAK AKKOR, HA VAN OLYAN INTERPETÁCIÓJA AMELYBEN IGAZ.

Logikai törvény, szemantika szinten	Átírási szabály /*Rewrite Rules* /, szintaxis szinten
$A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge B \Rightarrow A))$	$A \Leftrightarrow B = ((A \Rightarrow B) \wedge B \Rightarrow A))$
$A \Rightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$	$A \Rightarrow B = (\neg A \vee B)$
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$	$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$
$\neg\neg A \Leftrightarrow A$	$\neg\neg A = A$
$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee B \vee C \Leftrightarrow \vee\{A,B,C\}$	$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C = A \vee B \vee C = \vee\{A,B,C\}$
$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge B \wedge C \Leftrightarrow \wedge\{A,B,C\}$	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \wedge C = A \wedge B \wedge C = \wedge\{A,B,C\}$
$\wedge\{\} = \forall F \in \{\}\ F=1 \Leftrightarrow \forall(F \in \{\} \Rightarrow F=1)$	
$F \vee 1 \Leftrightarrow 1$	$F \vee 1 = 1$
$F \wedge 0 \Leftrightarrow 0$	$F \wedge 0 = 0$
$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$	$A \wedge \neg A = 0$
$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$	$A \vee \neg A = 1$
$0 \Rightarrow F \Leftrightarrow 1$	$0 \Rightarrow F = 1$
$F \Rightarrow 1 \Leftrightarrow 1$	$F \Rightarrow 1 = 1$

Példa:
S ← „SZÉPAZ IDŐ”
T ← „TANULOK”
E ← „ELMEGYEK A STRANDRA”

Logikai törvény:
„**HA** SZÉP AZ IDŐ”, **AKKOR** „TANULOK” **VAGY** „ELMEGYEK A STRANDRA”
$\underbrace{S}_{A} \Rightarrow \underbrace{T \vee E}_{B}$ Átírási szabály alkalmazása: $(A \Rightarrow B) = (\neg A \vee B)$

$S \Rightarrow T \vee E = \neg S \vee (T \vee E)$
NEM „SZÉP AZ IDŐ” **VAGY** „ELMEGYEK A STRANDRA” **VAGY** „A STRANDON TANULOK”

2.8 Konjunktív és Diszjunktív normál forma

<u>DEF</u>(**LITERAL**): AZT MONDJUK, HOGY AZ „L” FORMULA LITERAL, AKKOR ÉS CSAK AKKOR, HA „L” VAGY ATOMI FORMULA VAGY ATOMI FORMULÁNAK A TAGADÁSA.

<u>DEF</u>(**KLÓZ,CLAUSE**): AZT MONDJUK, HOGY A „C” FORMULA KLÓZ, AKKOR ÉS CSAK AKKOR, HA LITERÁLOK DISZJUNKCIÓJA.

Példák:

A	$\neg A$	$A \vee \neg B$	$A \wedge B \vee \neg C$
ATOM	ATOM	-	-
LITERAL	LITERAL	-	-
KLÓZ	KLÓZ	KLÓZ	-

DEF(**KONJUKTÍV NORMÁL FORMA, RÖVIDEN KNF**): AZT MONDJUK, HOGY AZ „F" FORMULA KONJUKTÍV NORMÁL FORMÁBAN VAN, AKKOR ÉS CSAK AKKOR, HA „F" KLÓZOK KONJUNKCIÓJA.

ALTERNATÍV DEF(**KONJUKTÍV NORMÁL FORMA, RÖVIDEN KNF**): AZT MONDJUK, HOGY AZ „F" KONJUNKTÍV NORMÁL FORMA, AKKOR ÉS CSAK AKKOR, HA „F" LITERÁLOK KONJUNKCIÓJA.

KNF: $(\vee \vee) \wedge (\vee \vee) \wedge (\vee \vee)$

Néhány logikai művelet, konjunktív normálformában:

A

$A \vee B$

$A \vee \neg B$

$A \wedge \neg B$

$(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

A következő formulák viszont nem normál formájúak:

$\neg(A \vee B) \wedge C$,mert a negáció nem csak atomot köt, hanem egy összetett formulát;
$(A \wedge B) \vee C$,mert nem konjunkciós formula (közvetlen részformulái nem konjunkcióval vannak összekapcsolva), és mert az egyik részformula nem elemi diszjunkció, hanem elemi konjunkció;
$(A \wedge B) \Rightarrow C$,mert előfordul nem megengedett operátor ($\Rightarrow$).

A példáink hibás formulái átírási szabályok sorozatának alkalmazásával konjunktív normálformájúra hozhatóak:

Nem KNF	Átírási szabály alkalmazása után KNF
$\neg(A \vee B) \wedge C$	$\neg A \wedge \neg B \wedge C$
$(A \wedge B) \vee C$	$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$
$(A \wedge B) \Rightarrow C$	$(\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$

DEF(**DISZJUNKTÍV NORMÁL FORMA, RÖVIDEN DNF**) AZT MONDJUK, HOGY AZ „F" FORMULA DISZJUNKTÍV NORMÁL FORMÁBAN VAN, AKKOR ÉS CSAK AKKOR HA „F" LITERÁLOK KONJUNKCIÓINAK DISZJUNKCIÓJA.

DNF: $(\wedge \wedge) \vee (\wedge \wedge) \vee (\wedge \wedge)$

Néhány logikai művelet, diszjunktív normálformában:

A

$A \vee B$
$A \vee \neg B$
$A \wedge \neg B$
$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

A következő formulák viszont nem diszjunktív normálformában vannak:
$\neg (A \wedge B) \vee C$, mert a negáció nem csak atomot köt, hanem egy összetett formulát;
$(A \vee B) \wedge C$, mert nem egy elemi konjunkció, hanem egy elemi diszjunkció a konjunkció egy tagja;
$(A \wedge B) \Rightarrow C$, mert előfordul nem megengedett operátor ($\Rightarrow$).

A példáink hibás formulái átírási szabályok sorozatának alkalmazásával diszjunktív normál formájúra hozhatóak:

Nem DNF	Átírási szabály alkalmazása után DNF
$\neg (A \wedge B) \vee C$	$\neg A \vee \neg B \vee C$
$(A \vee B) \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$(A \wedge B) \Rightarrow C$	$(\neg A \wedge \neg B) \vee (C)$

2.8.1 Tetszőleges formulát KNF-re, illetve DNF-re hozó algoritmus

ALG(**KNF-re illetve DNF-re hozó ALGORITMUS**):
INPUT: TETSZŐLEGES FORMULA
OUTPUT: AZ INPUT FORMULÁVAL EKVIVALENS **KNF** VAGY **DNF** ALAKÚ FORMULA

ELSŐ LÉPÉS: AZ $\mathbf{A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)}$ ÁTÍRÁSI SZABÁLY ISMÉTELT ALKALMAZÁSÁVAL EL KELL TÜNTETNI AZ INPUT FORMULÁBÓL AZ ÖSSZES $\Leftrightarrow$ **/ AKKOR ÉS CSAK AKKOR jelet /.**

MÁSODIK LÉPÉS: AZ $\mathbf{A \Rightarrow B = \neg A \vee B}$ ÁTÍRÁSI SZABÁLY ISMÉTELT ALKALMAZÁSÁVAL EL KELL TÜNTETNI AZ ÖSSZES $\Rightarrow$ **/ IMPLIKÁCIÓ jelet /.**

HARMADIK LÉPÉS: A $\mathbf{\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B}$
$\mathbf{\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B}$
$\mathbf{\neg \neg A = A}$
ÁTÍRÁSI SZABÁLYOK ISMÉTELT ALKALMAZÁSÁVAL BEHÚZOM AZ ATOMHOZ A TAGADÁSOKAT.

NEGYEDIK LÉPÉS: A KÉT **DISZTRIBUTIVÍTÁSI SZABÁLLYAL**, **KNF-RE VAGY DNF-RE** HOZZUK A FORMULÁT, ÉS EZ LESZ AZ **OUTPUT.**

$$\mathbf{A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}$$
$$\mathbf{A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)}$$

2.8.2 A normálformára alakítás bemutatása példákon keresztül

S ← „SÜT A NAP”
E ← „ELMEGYEK A STRANDRA”
T ← „TANULOK”

Előnyelv:**HA** „SÜT A NAP” **AKKOR** „ELMEGYEK A STRANDRA” **VAGY** „TANULOK”

A következő mat.logika kifejezést alakítsuk KNF-re az algoritmus lépéseit alkalmazva:
$S \Rightarrow T \vee E$
Első lépés: ez esetben kimarad, mert a kifejezés, nem tartalmaz: **⇔ /akkor és csak akkor/** jelet.

Második lépés: $A \Rightarrow B = \neg A \vee B$ átírási szabály alkalmazásával az **⇒ /implikáció/** eltüntetése az INPUT kifejezésből.
$\underline{S} \Rightarrow \underline{T \vee E}$
$A \Rightarrow B = \neg S \vee (T \vee E) = \neg S \vee T \vee E$
Harmadik lépés: ez esetben kimarad, mert a második lépés után kapott kifejezés nem tartalmaz atomhoz behúzandó tagadást**.**
Negyedik lépés: ez esetben kimarad, mert a második lépés végre hajtása után a kapott kifejezés konjunktív normál formájú az-az KNF.
OUTPUT: $\neg S \vee T \vee E$

2.8.3 Példa összetettebb kifejezés normál formára alakítására

S ← „SÜT A NAP”
T ← „TANULOK”
Ö ← „ÖTÖST KAPOK”
INPUT: $\neg(\neg S \wedge \neg T) \Leftrightarrow \neg Ö$

Első lépés: ⇔ /akkor és csak akkor/ eltávolítás átírási szabály alkalmazásával

$$\underbrace{\neg(\neg S \wedge \neg T)}_{A} \Leftrightarrow \underbrace{\neg Ö}_{B} = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

$$(\neg(\neg S \wedge \neg T) \Rightarrow \neg Ö) \wedge (\neg Ö \Rightarrow \neg(\neg S \wedge \neg T))$$

Második lépés: ⇒ implikációk átírása

$$(\underbrace{\neg(\neg S \wedge \neg T)}_{A} \Rightarrow \underbrace{\neg Ö}_{B}) \wedge (\underbrace{\neg Ö}_{A} \Rightarrow \underbrace{\neg(\neg S \wedge \neg T)}_{B}) \qquad = \qquad (\neg A \vee B)$$

$$(\neg(\neg(\neg S \wedge \neg T)) \vee \neg Ö) \wedge (\neg(\neg Ö) \vee (\neg(\neg S \wedge \neg T)))$$

Harmadik lépés: a tagadások behúzása az atomhoz De Morgan-azonossággal, és a dupla tagadások megszüntetése átírási szabályok alkalmazásával
.

$$(\neg(\underbrace{\neg(\neg S \wedge \neg T)}_{\neg(A \wedge B)}) \vee \neg Ö) \wedge (\neg(\neg Ö) \vee (\underbrace{\neg(\neg S \wedge \neg T)}_{\neg(A \wedge B)})) \qquad = \neg A \vee \neg B$$

$(\neg(\underline{\neg\neg S} \vee \underline{\neg\neg T}) \vee \neg Ö) \wedge (\neg(\neg Ö) \vee (\underline{\neg\neg S} \vee \underline{\neg\neg T}))$

$\neg\neg\mathbf{A} \quad \neg\neg\mathbf{A} \qquad \neg\neg\mathbf{A} \qquad \neg\neg\mathbf{A} \quad \neg\neg\mathbf{A} \quad = \quad \mathbf{A}$

$(\underline{\neg(S \vee T)} \vee \neg Ö) \wedge (Ö \vee S \vee T)$

$\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \qquad = \quad \neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}$

Negyedik lépés: a disztributivitási átírási szabály alkalmazásával a **KNF** formára alakítjuk a formulát.

$((\neg S \wedge \neg T) \vee \neg Ö) \wedge (Ö \vee S \vee T)$

$(\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \vee \mathbf{A} \qquad = \quad (\mathbf{A} \vee \mathbf{C}) \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$

$(\neg \mathbf{Ö} \vee \neg \mathbf{T}) \wedge (\neg \mathbf{Ö} \vee \neg \mathbf{S}) \wedge (\mathbf{Ö} \vee \mathbf{S} \vee \mathbf{T})$

OUTPUT: $\underline{(\neg \mathbf{Ö} \vee \neg \mathbf{T}) \wedge (\neg \mathbf{Ö} \vee \neg \mathbf{S}) \wedge (\mathbf{Ö} \vee \mathbf{S} \vee \mathbf{T})}$

3 Elsőrendű matematikai logika

3.1 Elsőrendű matematikai logika fogalma

Az **elsőrendű logika** a matematikai logikának az **elsőrendű nyelvekkel** foglalkozó ága. Az elsőrendű nyelvek olyan formális nyelvek, melyekben lehetőség van az individuumváltozók **kvantifikálására,** vagyis a **„van olyan x amelyre A teljesül”** és a **„minden x-re A teljesül”** típusú állítások megfogalmazására.

Az elsőrendű logika elméletének két fő - egymást nem kizáró, hanem kiegészítő - paradigmája a szintaktikai és a szemantikai megközelítés. A szintaxis a logikai jelek, jelsorozatok, formulák formai jellemzésével foglalkozik; a szemantika pedig a jelek értelmezésével, azzal, hogy hogyan lehet kitölteni őket tartalommal és használni a matematikában, más tudományterületeken, illetve a köznapi életben ipari, kereskedelmi stb. alkalmazásokban.

3.2 Mi a különbség a nulladrendű matematikai logikához képest?

A nulladrendű matematikai logikában a **kijelentés megbonthatatlan**, az elsőrendű logikában a **kijelentések lehetnek paraméteresek**.

Példák kijelentésekre:

Nulladrendű matematikai logika	Elsőrendű matematikai logika
F ← „A KUTYA FUT”	F ← „FUT” k ← „kutya” m ← „macska” F(k) ← „A KUTYA FUT” F(m) ← „A MACSAKA FUT”
S ← „SÜT A NAP”	S ← „SÜT” n ← „NAP” S(n) ← „SÜT A NAP”

Kijelentés előnyelven: 1 nagyobb, mint 0
$>$ ← „NAGYOBB, MINT” – szimbólumhoz rendeljük a „nagyobb, mint” kifejezést.
Predikátumok jelentése: az univerzum elemei közötti kapcsolatot, relációt fejez ki

Paraméteres kijelentés (2 paraméteres) predikátum
↓
Mondat: **1 > 0** /a predikátum INFIX alakú/
↑ ↑
Konstansok

Predikátumok leírására három alak létezik: PREFIX alak, ezt az alakot használja első sorban, az elsőrendű matematikai logika. Továbbá létezik az INFIX és POSTFIX alak.

>**(1,0)**	PREFIX alak
1 > **0**	INFIX alak
(1,0)>	POSTFIX alak

PREDIKÁTUM ⇔ PARAMÉTERES KIJELENTÉS

Minden nem kijelentést **objektumnak** tekintünk az elsőrendű matematikai logikában. Elsőrendű matematikai logikában a **kijelentés paramétere nem lehet kijelentés, csak objektum.** Az **objektumokat TERM-nek nevezzük** az elsőrendű matematikai logikában.

DEF(**TERM**/OBJEKTUM): AZT MONDJUK, HOGY A „k” TERM (vagy objektum), AKKOR ÉS CSAK AKKOR, HA „k” egy:

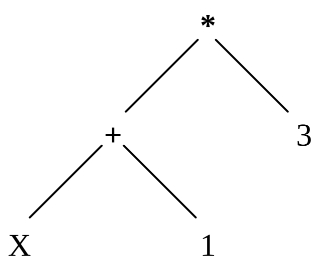
- KONSTANS
- VÁLTOZÓ
- FÜGGVÉNY HÍVÁS KONKRÉT PARAMÉTEREKKEL, AHOL A PARAMÉTEREK TERMEK

MINDEN TERM, A FENTI SZABÁLY VÉGES SOKSZORI ALKALMAZÁSÁSVAL ÁLL ELŐ.

Formálisan leírva mi a TERM:
TERM(k): ⇔
KONSTANS (k), $\vee$
VALTOZÓ (k), $\vee$
(FÜGGVÉNYSZIMBÓLUM(T) $\wedge$ TERM(t_1) $\wedge$ TERM(t_2) … $\wedge$ TERM(t_n))
$\Rightarrow$ k=F(t_1,t_2,…t_n)

Példa: (X+1) * 3

Kifejezésfán ábrázolva:



INT: TERM: A KIFEJEZÉS
FORMULA: A LOGIKAI KIFEJEZÉS

DEF(**ATOMI FORMULA, ATOM**): AZT MONDJUK, HOGY A $\mathbf{P(t_1,t_2,\ldots t_n)}$ SZIMBÓLUM SOROZAT ATOMI FORMULA VAGY RÖVIDEN ATOM, AKKOR ÉS CSAK AKKOR HA **P** EGY **n** PARAMÉTERES KIJELENTÉS MÁS NÉVEN PREDIKÁTUM ÉS $t_1,t_2\ldots,t_n$ TERMEK.

3.3 KVANTOR / QUANTIFIER /

Az univerzális kvantor

Ha egy sokaság, halmaz minden elemére igaz egy állítás, azt az univerzális (általános) kvantorral jelöljük:∀ */mind, mindegyik, for all/*

$\boxed{\forall_x}$ jelentése: minden x-re igaz, minden x-re fennáll.

Az egzisztenciális kvantor

Ha egy ítéletet **van legalább egy olyan** x, amelyre igaz kifejezéssel képezünk, akkor egzisztenciális kvantort alkalmazzuk. Jele: ∃ */létezik, van egy, there exists/*

$\boxed{\exists_x A}$ jelentése: létezik legalább egy olyan x, amelyre az A állítás igaz.

3.3.1 Kvantorok szintaxisa

∀ Formula (y)	*/kvantor hatókörébe tartozó formula/*
y	/kötött változó/
Formula (y)	/korlátozó feltétel/

Példa:

$$\forall_y \mathbf{P(y)}$$

P ← „PÉTER NEVŰ”
B ← „BARATOM”

„MINDEN BARÁTOM PÉTER NEVŰ”

$$\forall_y (\mathbf{B(y) \Rightarrow P(y)})$$

Példa:
MINDEN EMBER HALANDÓ
SZOKRATÉSZ EMBER, VAGYIS SZOKRATÉSZ HALANDÓ

H ← „HALANDÓ”
E ← „EMBER”
sz ← „SZOKRATÉSZ” */egy konkrét ember/*

MINDEN EMBER HALANDÓ

$$\underset{\substack{x\\E(x)}}{\forall} \mathbf{H(x)}$$

MINDEN EMBER HALANDÓ, SZOKRATÉSZ EMBER, VAGYIS SZOKRATÉSZ HALANDÓ.

$$\underset{\substack{x\\E(x)}}{\forall} \mathbf{H(x)} \wedge \mathbf{E(sz)} \Rightarrow \mathbf{H(sz)}$$

<u>Korlátozó feltétel szemantikája:</u> mivel a kvantorok az univerzum összes objektumára mondanak valamit, ami konstruktívan lehetetlen ezért korlátozó feltételt adunk, innentől fogva a kvantor azokról beszél, amit a korlátozás meghatároz.

Pédák:
MINDEN KOCSI PIROS
MINDEN objektum, ami KOCSI az-az objektum PIROS
K←KOCSI
P←PIROS

$$\underset{\substack{x\\K(x)}}{\forall} \mathbf{P(x)}$$

MINDEN KUTYA UGAT
MINDEN objektum, ami KUTYA az-az objektum UGAT
K←KUTYA
U←UGAT

$$\underset{\substack{x\\K(x)}}{\forall} \mathbf{U(x)}$$

VAN PÉTER NEVŰ BARÁTOM
VAN olyan objektum, aki PÉTER NEVŰ, az-az objektum a BARÁTOM
P←PÉTER
B←BARÁTOM

∃ B(x)
x
P(x)

MINDEN PÉTER NEVŰ BARÁTOMNAK VAN KUTYÁJA
MINDEN olyan objektum, aki **PÉTER** NEVŰ az-az objektum, aki a **BARÁTOM**NAK van **KUTYÁ**JA objektuma

P←PÉTER
B←BARÁTOM
K←KUTYA
V←VAN NEKI

∀ ∃ V(x,y)
x y
P(x) K(y)
B(x)

3.3.2 Kvantorok szemantikája / Semantics /

∀ B(x)
x
P(x) elsőrendű matematikai logikai kifejezés szemantikája a következő: a **kvantor veszi** az **összes** olyan **objektumot, amelyre igaz a P kijelentés** (P feltétel) és **megnézi univerzális kvantor esetén, hogy minden ilyen objektumra igaz-e a B állítás, ha igaz, akkor az univerzális kvantor igaz. Ha van ellen példa,** az-az van objektum, **amelyre nem igaz a B állítás, akkor az univerzális kvantor hamis.**

∃ B(x)
x
P(x) elsőrendű matematikai logikai kifejezés szemantikája a következő: a **kavnator veszi** az **összes** olyan objektumot, amelyre igaz a P állítás és **megnézi egzisztenciális kvantor esetén, hogy van-e olyan B állítás, amelyre igaz, ha van olyan állítás, amelyre igaz, akkor a kvantor igaz. Ha mindegyik objektumra hamis a B állítás, akkor hamis az egzisztenciális kvantor.**

Univerzális kvantor szemantikája konstruktívan: veszem az összes olyan objektumot, amelyre igaz a P állítás, az ilyen objektumokat egyesével behelyettesítem x helyére, ha találok ellen példát, akkor hamis, ha nem találok ellen példát, akkor igaz.

3.3.3 A kantorok a programozásban a „FOR ciklusok”

Univerzális kvantor

$$\forall_{\substack{x\\P(x)}} B(x)$$

```
EMBER P[] =(5,11,13,17);
bool KI = true;
foreach(int x in P)
{
        if(!B(x))
        {
        KI = false;
        break;
        }
}
```

Egzisztenciális kvantor

$$\exists_{\substack{x\\P(x)}} B(x)$$

```
EMBER P[] =(5,11,13,17);
bool KI = false;
foreach(int x in P)
{
        if(B(x))
        {
        KI = true;
        break;
        }
}
```

KI1	KI2
$\forall_{\substack{x\\P(x)}}$	$\exists_{\substack{y\\K(y)}}$ sz(x,y)

```
EMBER P[]=(1,5,7,8,13);
KONYV K[]=(“DELPHI3”,”DBASE III PLUSZ”,
”3DSTUDIO MAX”, ”ALGORITMUSOK”);
bool KI1 = true;
foreach (int x in P)
{
        bool KI2 = false;
        foreach(string y in K)
        {
        if (SZ(x,y))
                {
                KI2 = true;
                break;
                }
        }
        If(!(KI2))
        {
        KI1= false;
        break;
        }
}
```

4 Elsőrendű matematikai logikai nyelv / First-order logic /

Az elsőrendű matematikai logikában, megjelent a TERM, bevezetésre került a típus fogalma és megalkották az elsőrendű matematikai nyelveket.

DEF(**TIPUSOS ELSŐRENDŰ MATEMATIKAI LOGIKAI NYELV**): AZT MONDJUK HOGY A **$\Omega = \langle$T,K,F,P$\rangle$** RENDEZETT NÉGYES TÍPUSOS ELSŐRENDŰ MATEMATIKAI LOGIKAI NYELV AKKOR ÉS CSAK AKKOR, HA

- **T: TÍPUSOS** SZIMBÓLUMOK NEM ÜRES HALMAZA
- **K: KONSTANS** SZIMBÓLUMOK HALMAZA
- **F: FÜGGVÉNY** SZIMBÓLUMOK HALMAZA
- **P: PREDIKÁTUMOK** SZIMBÓLUMOK NEM ÜRES HALMAZA

4.1 A GEOM nyelv / geometria nyelv/

GEOM=$\langle$PONT, EGYENES, SÍK}, {}, {},{PONT=PONT, PONT$\in$EGYENES, PONT$\in$SIK}$\rangle$

PONTOK: A, B, C
EGYENES: p, q, r
SÍK: a, b, c

Példa mondatok:
Ha **A pont** rajta van az **p egyenesen,** és **A pont** egybe esik **B ponttal,** akkor **B pont** rajta van **p egyenesen.**

$$(A \in p \wedge A = B) \Rightarrow B \in p$$

A **p egyenes egybe esik q egyenessel,** akkor és csak akkor, ha minden **A pont** rajta van **p egyenesen,** és viszont minden **A pont** rajta van **q egyenesen** is.

$$p=q: \Leftrightarrow \underset{A}{\forall}(A \in p \Leftrightarrow A \in q)$$

A **p egyenes** nem esik egybe **q egyenessel,** akkor és csak akkor, ha nem igaz, hogy **p egyenes** egybe esik **q egyenessel**.

$$p \neq q: \Leftrightarrow \neg(p = q)$$

Az **A pont** nem esik egybe **B ponttal,** akkor és csak akkor, ha nem igaz, hogy **A pont** egybe esik **B ponttal**.

$$A \neq B: \Leftrightarrow \neg(A = B)$$

A **p egyenes** metszi **q egyenest,** akkor és csak akkor, ha létezik olyan **A pont,** ami rajta van a **p egyenesen**, és rajta van a **q egyenesen,** és **p egyenes** nem esik egybe **q egyenessel**.

$$p \nparallel q: \Leftrightarrow \underset{A}{\exists}(A \in p \wedge A \in q) \wedge p\neq q$$

Az **a sík** egybe esik **b síkkal,** akkor és csak akkor, ha az **a sík** minden pontja rajta van **b síkon,** és viszont.

$$\mathbf{a = b :\Leftrightarrow \underset{A}{\forall}(A \in a \Leftrightarrow A \in b)}$$

A **p egyenes** rajta van az **a síkon.**

$$\mathbf{p \in a :\Leftrightarrow \underset{q}{\exists}(q \in a \wedge p = q)}$$

$$\mathbf{p \in a :\Leftrightarrow \underset{A}{\forall}(A \in p \Rightarrow A \in a)}$$

A **p egyenes** párhuzamos **q egyenessel akkor és csak akkor,** ha **p egyenes** és **q egyenes** nem esik egybe és, ha minden **A pont** rajta van **p egyenesen**, ugyanakkor nincs rajta **q egyenesen,** és minden **A pont** rajta van **q egyenesen,** ugyanakkor nincs rajta **p egyenesen** és létezik olyan **a sík**, amin rajta van **p egyenes** és **q egyenes** is.

$$\mathbf{p \parallel q :\Leftrightarrow \neg(p = q) \wedge \underset{A}{\forall}(A \in p \Rightarrow A \notin q) \wedge \underset{A}{\forall}(A \in q \Rightarrow A \notin p) \wedge \underset{a}{\exists}(p \in a \wedge q \in a)}$$

4.2 AR nyelv / aritmetikai nyelv /

AR = $\langle$\{természetes szám\},\{0\},\{SUC:N$\to$N, +:N,N$\to$N,*: N, N$\to$N \},\{N=N\}$\rangle$

1: = SUC(0) / successor /

SX: = SUC(X)

2: = S1

3: = S2

$X^2 := X*X$

$X=\sqrt{2} :\Leftrightarrow X^2=2$

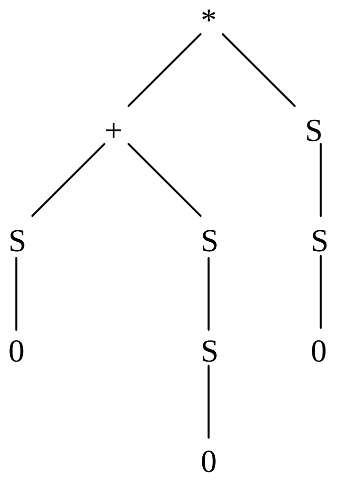
$$X \geq Y :\Leftrightarrow \underset{Z}{\exists}(Y + Z = X)$$

$X>Y :\Leftrightarrow X \geq Y \wedge X \neq Y$

$X \mid Y :\Leftrightarrow \exists\, (Z * X = Y) \wedge X \neq 0$

PRIM(X): $\Leftrightarrow X \neq 0 \wedge X \neq S01 \wedge (\neg\exists(Z \mid X \wedge Z \neq S0 \wedge Z \neq S1 \wedge Z \neq X))$

Példa AR nyelvi kifejezésfára: **(S0 + SS0) * SS0**



Kötött és szabad változók / Free and bound variables/
<u>Intuíció:</u> Egy változó kötött, hogy ha a kvantor alatt szerepel és ezen, változónak azon előfordulásai melyek kvantor hatáskörébe tartoznak. A kötött változóba, nem helyettesíthetünk, oda a kvantor helyettesít be.

Egy változó előfordulása szabad, ha nem kötött. Szabad változóba bármit helyettesíthetek, egyetlen megkötés, ha van típusa, akkor csak olyan típusút értéket helyettesíthetek be.

4.3 Korlátozó formula értelmezése

$$\forall_{\substack{x\\P(x)}} Q(x) \Leftrightarrow \forall_{x}(P(x) \Rightarrow Q(x))$$

$$\exists_{\substack{x\\P(x)}} Q(x) \Leftrightarrow \exists_{x}(P(x) \Rightarrow Q(x))$$

$$\forall_{\substack{x\\P(x)\\Q(x)}} R(x) \Leftrightarrow \forall_{x}(P(x) \Rightarrow Q(x) \Rightarrow R(x))$$

4.4 Gyakorlás

$p = q :\Leftrightarrow \forall(A \in p \wedge \Leftrightarrow A \in q)$

$p \neq q :\Leftrightarrow \neg(p = q)$

$p \times q :\Leftrightarrow \underset{A}{\exists}(A \in p \wedge A \in q) \wedge p \neq q$

$p \parallel q :\Leftrightarrow \neg\underset{A}{\exists}(A \in p \wedge A \in q) \wedge \underset{a}{\exists}(p \in a \wedge q \in a)$

$\underset{x}{\forall} p(x) \Leftrightarrow \neg\underset{x}{\exists} \neg p(x)$

$\underset{x}{\forall} \neg p(x) \Leftrightarrow \neg\underset{x}{\exists} p(x) \Leftrightarrow \underset{A}{\forall} \neg (A \in p \wedge A \in q) \Leftrightarrow (\neg A \in p) \vee (\neg A \in q)$

$\Leftrightarrow \underset{A}{\forall}(A \in p \Rightarrow \neg(A \in q))$

$AR = \langle\{\text{természetes szám}\},\{0\},\{SUC:N \rightarrow N, +:N,N \rightarrow N, *: N,N \rightarrow N\},\{N=N\}\rangle$

1:SUC(0)

SX:=SUC(X)

2:=S1

3:=S2

$x^2 := x*x$

$x = \sqrt{2} :\Leftrightarrow x^2 = 2$

$x \geq y :\Leftrightarrow \underset{z}{\exists}(y + z = x)$

$x > y :\Leftrightarrow \underset{z}{\exists}(y + z = x \wedge (z \neq 0)$

$x \neq y :\Leftrightarrow \neg (x = y)$

$x > y :\Leftrightarrow x \geq y \wedge x \neq y$

$2 / 4 :\Leftrightarrow 2*2 = 4$

$x \mid y :\Leftrightarrow \exists_z\, z*x = y \wedge x \neq 0$

$2 \mid 4 :\Leftrightarrow 2 * 2 = 4$
$2 \mid 6 :\Leftrightarrow 2 * 3 = 6$
$3 \mid 6 :\Leftrightarrow 3 * 2 = 6$
$x \mid y :\Leftrightarrow \exists_z\, x * z = y \wedge x \neq 0$

$9 \div 5 = 1 :\Leftrightarrow (5*1) + 5 > 9 \wedge 5*1 \leq 9$
$9 \div 4 = 2 :\Leftrightarrow (4*2) + 4 > 9 \wedge 4*2 \leq 9$
$9 \div 3 = 3 :\Leftrightarrow (3*3) + 3 > 9 \wedge 3*3 \leq 9$

$x \div y = z :\Leftrightarrow (y*z) + y > x \wedge y*z \leq x$

$9 \% 5 = 4 :\Leftrightarrow 9 \div 5 = 1 \wedge 1 * 5 + 4 = 9$
$9 \% 4 = 1 :\Leftrightarrow 9 \div 4 = 2 \wedge 2 * 4 + 1 = 9$
$9 \% 3 = 0 :\Leftrightarrow 9 \div 3 = 3 \wedge 3 * 3 + 0 = 9$

$x \% y = z :\Leftrightarrow \exists_k\, (x \div y = k \wedge k * y + z = x)$

5 Természetes levezetés

A természetes levezetés célja, hogy formálisan tudjuk levezetni a formulákat:
axiómák, feltételezések $\models$ állítás

$A_1 \wedge A_2 \ldots An \wedge F_1 \wedge F_2 \ldots F_n \Rightarrow A$

Az **axióma** olyan kiindulási feltételt jelent, amit adottnak veszünk az érvelések során, tehát **alapfogalom**nak nevezzük. Az axióma különféle okok miatt nem megkérdőjelezhető, megállapított alaptény.

A szemantikus levezetés jelölése: $\models$
A szintaxis alapján történő levezetés jelölése: $\vdash$

Példa: $\models A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
Ha felhasználjuk a jelek jelentését, akkor levezetés szemantikusan történik.

A	$\Rightarrow$	B	$\Leftrightarrow$	$\neg$	A	$\vee$	B
0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1

<u>Levezetés szintaxisban:</u> Átírási szabályokkal történő egyszerűsítésekkel hajtjuk végre.
Ha szemantikusan le tudom vezetni, akkor le tudom vezetni szintaxisban és viszont.

Természetes levezetés axiómája: A , K ├ A
Bizonyítási szituáció / PROOF SITUATION /
A levezetés jel baloldalán lévő kifejezéseket tudásbázisnak nevezzük.
TUDÁSBÁZIS ├ CÉL / KNOWLEDGE BASE ├ GOAL /

A TUDÁSBÁZIS 0 vagy több formulából áll, a CÉL mindig egy formula.
A „**K**” **0 vagy több formulát** jelöl a tudásbázisban.
Az „**A**”-ból **és a tudásbázis maradékából** levezethető „**A**”.

A természetes levezetés átírási szabályokból áll

↑ **FENTI BIZONYÍTÁSI SZITUÁCIÓ**
LENTI BIZONYÍTÁSI SZITUÁCIÓ
A lenti bizonyítási szituáció átírható a fentire.

A természetes levezetés egy formula fát képez, formula fa gyökere a kiinduló bizonyítási szituáció.

-- -- -- -- -- -- -- --
-- -- -- -- -- --
├ A⇒ B ⇔ ¬A ∨ B

A természetes levezetés akkor sikeres, ha a levezetési fa minden levél eleme axióma az-az A , K ├ A formájú.

A természetes levezetés technikája: Olyan szabályok rendszere, amelyek megkönnyítik a levezetést. Bármely logikai törvény „levezethető” az axiómákból a levezetési szabályok segítségével.

Definíció:
Legyen Γ Ω-beli formulák véges halmaza, azaz $\Gamma = \{B_1, B_2 \dots B_n\}$ (lehet üres halmaz is).
Azt mondjuk, hogy a Γ formulahalmazból levezethető az A formula a predikátum-kalkulusban, ha megadható $D_1, D_2 \dots D_m$ formulasorozat oly módon, hogy $D_m = A$ és a $D_1, D_2 \dots D_{m-1}$ formulák vagy
- axiómák
- Γ-beli formulák, nyílt premisszák
- az előző formulákból megkaphatóak a levezetési szabályok segítségével

Jelölés
$\Gamma \vdash A$ (Gammából levezethető A a predikátum-kalkulusban)
$\Gamma \nvdash A$ (Gammából nem vezethető le A a predikátum-kalkulusban)

5.1 Természetes levezetés átírási szabályai

1.(⇒)

$$\frac{K, A \vdash B}{K \vdash A \Rightarrow B}$$

2. (⇒)

$$\frac{K \vdash A\ ;\ K \vdash A \Rightarrow B}{K \vdash B}$$

Modus ponens: Ha tudom, hogy **A igaz** és **A ⇒ B,** akkor **B igaz**

3. (∧)

$$\frac{K\ A, B \vdash C}{K, A \wedge B \vdash C}$$

4.(∧)

$$\frac{K \vdash A\ ;\ K \vdash B}{K \vdash A \wedge B}$$

5. (∨)

$$\frac{K, A \vdash C\ ;\ K, B \vdash C}{K, A \vee B \vdash C}$$

6.1(∨)

$$\frac{K, \neg A \vdash B}{K \vdash A \vee B}$$

6.2(∨)

$$\frac{K; \neg B \vdash A}{K \vdash A \vee B}$$

6.3(∨)

$$\frac{K, A \vdash B}{K \vdash \neg A \vee B}$$

6.4(∨)

$$\frac{K ; B \vdash A}{K \vdash A \vee \neg B}$$

7.(¬) Indirekt bizonyítás

$$\frac{K, A \vdash B\ ;\ K, A \vdash \neg B}{K \vdash \neg A}$$

8. (¬) Mindig alkalmazható

$$\frac{K \vdash \neg\neg A}{K \vdash A} \qquad \frac{K \vdash A}{K \vdash \neg\neg A}$$

9.(⇔)

$$\frac{K, A \vdash B\ ;\ K, B \vdash A}{K \vdash A \Leftrightarrow B}$$

10.(⇔)

$$\frac{K \vdash B\ ;\ K \vdash A \Leftrightarrow B}{K \vdash A}$$

Kvantorokat eltüntető szabályok

11.

$$\frac{K \vdash P(x')}{K \vdash \underset{x}{\forall} P(x)}$$

12.

$$\frac{K, P(t) \vdash A}{K, \underset{x}{\forall} P(x) \vdash A}$$

13.

$$\frac{K \vdash P(t)}{K \vdash \underset{x}{\exists} P(x)}$$

14.

$$\frac{K, P(x') \vdash A}{K, \underset{x}{\exists} P(x) \vdash A}$$

5.1.1 Példa természetes levezetésre

$\vdash (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

$\underline{A}$ $\qquad$ $\underline{A}$

$\underline{A}, \neg A, \neg B \vdash \ldots$; $A, \underline{\neg A}, \neg B \vdash \underline{\neg}\ldots$

---

7. $A, \neg A \vdash \neg\neg B$

K **A**

$\underline{A}$ $\qquad$ $\underline{A}$

$A \Rightarrow B, \underline{A} \vdash \ldots$; $A \Rightarrow B, \underline{A} \vdash \ldots \Rightarrow B$ $\qquad$ **8.** $A, \neg A \vdash B$; $A, \underline{B} \vdash \underline{B}$

K **A**

---

2. $A \Rightarrow B, A \vdash B$ $\qquad$ **5.** $\neg A \vee B, A \vdash B$

K $\qquad$ **A B K C**

6.3 $(A \Rightarrow B) \vdash (\neg A \vee B)$; **1.** $(\neg A \vee B) \vdash (A \Rightarrow B)$

K A B $\qquad$ **K A B**

---

9. $I \vdash (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

K A B

$\vdash (A \wedge B) \Rightarrow A$

0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

$\underline{A}, B \vdash \underline{A}$

---

3. $,A \wedge B \vdash A$

K A B C

---

1. $\vdash (A \wedge B) \Rightarrow A$

K A B

$A \Rightarrow (A \vee B)$
0 1 0 0 0
0 1 0 1 1
0 1 1 1 0
0 1 1 1 1

<u>A</u> ✓ , $\neg B \vdash$ <u>A</u> ✓

A $\vdash A \vee B$
6.2 **K A B**

---

1 $\vdash A \Rightarrow (A \vee B)$
K A B

A 2,8,10-es szabályokat bármikor lehet használni.
Három helyen kell gondolkodni:
2-es szabály esetén mit írjak „A”-ba.
7-es szabály esetén mit írjak „B”-be.
10-es szabály esetén mit írjak „B”-be ez ritkán használt szabály

Ha a tudásbázisban ellentmondás van, akkor kipipálhatjuk.
A tudásbázisban lévő tagadást nem tudjuk felhasználni csak akkor, ha a célban ugyanaz a tagadó formula van, mint a tudás bázisban.
Ha van ellentmondás, akkor a 8-as és 7-es szabály alkalmazása után befejezhető.

Ahelyett, hogy bebizonyítanám a célt, felteszem, hogy a cél nem igaz, és belátom, hogy ez a feltételezés ellentmondáshoz vezet. Ha van ellentmondás, akkor sikeres a bizonyítás, ha nincs, akkor sikertelen.

„ ; ” jelöli a, bizonyítási szituációk szét válását.

6 Halmaz elmélet

Ha életszerű példával szeretnénk szemléltetni mi is a halmaz, akkor vegyünk egy zsákot, tegyünk bele bármit és kaptunk egy halmazt.

A halmaz olyan struktúra, amely elemeket tartalmaz. Azt a kérdést tehetem fel, hogy eleme-e?

A halmazban az elemek sorrendje tetszőleges és minden elem egy előfordulása számít külön elemnek.

A halmazhoz hasonlóan az **elem** is alapfogalom és az a kapcsolat is, hogy egy elem **eleme-e** egy halmaznak. A halmazokat többször a halmaz elemeire jellemző tulajdonság megadásával adunk meg vagy, ha ez lehetséges, akkor a halmaz elemeinek a felsorolásával.

$\{1, 2, 1\} = \{1, 2\}$ Az két halmaz egyenlő mivel az elemek száma és sorrendje nem számít.

∈: Eleme-e? predikátum / Is member /

1 ∈ { 1, 2} jelentése: 1 eleme-e? {1,2} halmaznak, eredménye IGAZ
1 ∈ {3} jelentése: 1 eleme-e? {3} halmaznak, eredménye HAMIS

¬∃ **a** {} jelentése: nincs olyan elem, ami elme az üres halmaznak

6.1 Halmazt létrehozó konstruktor

Kötött változótól függő formula

{ _ | P(x)}
x kötött változó

Term

Példa a páros számok halmazát létrehozó konstruktorra:

{n | n n % 2 = 0} = {0,2,4,6…}
n
n ∈ N

A halmazt létrehozó konstruktor összegyűjti azokat a termeket, amelyre a formula igaz.
Az olyan **kvantor**okat, **amely**ek **objektumot hoz**nak **létre**, **konstruktor**oknak híjuk.

További példák halmazt létrehozó konstruktorokra:

Páratlan számok halmaza:
{ n | n % 2 = 1 }
n
n ∈ N

Három lábú kutyák halmaza:
{ k | LABAKSZAMA(k) = 3}
k ∈ kutyák

Péter nevű emberek halmaza:

{e | NEVE(e) = “Péter”}
e ∈ emberek

6.2 Függvények

Az $\in$ predikátumot nem definiáljuk megmondjuk egy tulajdonságát.

$$\boxed{x \in \{ y \mid P(y) \Leftrightarrow P(x)}$$

$x \in \{n \mid n\%2= 0\} \Leftrightarrow x \% 2 = 0$

n

$n \in N$

$x \in \{e \mid \text{NEVE}(e)=\text{"Péter"}\} \Leftrightarrow \text{Neve}(x) = \text{Péter}$

e

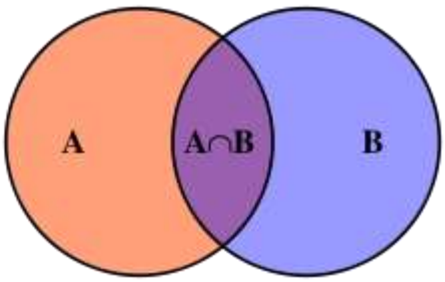
$e \in \text{emberek}$

6.3 Halmaz műveletek

Metszet / Intersection /

$A \cap B := \{a \mid a \in A \wedge a \in B\}$

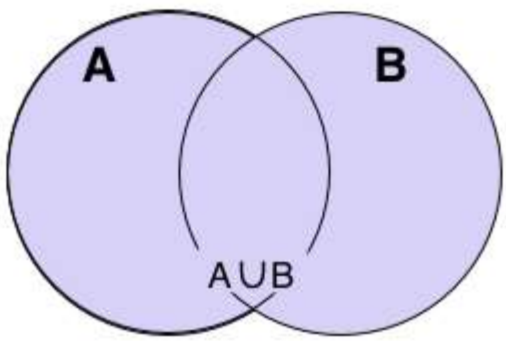
A



Egyesítés,unio / unio /

$A \cup B := \{a \mid a \in A \vee a \in B \}$

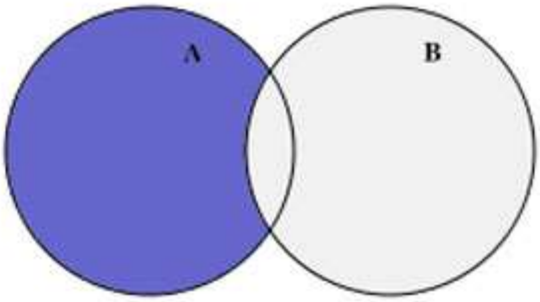
a



Különbség / relative complement /

$\mathbf{A \setminus B := \{a \mid a \in A \wedge a \notin B\}}$

a

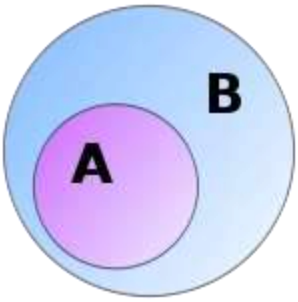


Részhalmaz / subset **/**

$\mathbf{A \subseteq B :\Leftrightarrow \forall(a \in A \Rightarrow a \in B)}$

a

$\mathbf{a \in A}$



Hatvány halmaz / power set **/**

$\mathbf{P(A) := \{A \mid B \subseteq A\}}$

B

Üres halmaz hatványhalmaza

P{{}} = {{}}

Az üres halmaz minden halmaznak a részhalmaza.

P{{1}} = {{},{1}}

P{{1,2}} = {{},{1},{2},{1,2}}

A hatványhalmaz elemszámát úgy kapjuk meg, hogy vesszük a 2-nek a kiinduló halmaz elemszámra emelt hatványát.

$\mathbf{|P(A)| = 2^{|A|}}$

Kiinduló halmaz elemszáma

Hatványhalmaz elemszáma

Két halmaz Descartes-szorzata / Cartesian product **/**

A és B halmaz ilyen sorrendű Descartes-szorzata

$$\mathbf{A \text{ x } B := \{ \langle a,b \rangle \mid \quad a \in A \ \wedge b \in B \}}$$
a , b

Tuple n-es

<u>Példák:</u>
{1 , 2} x {Péter} = {<1 , Péter> , <2 , Péter>}

{1,2} x {Péter,Pál} = {<1,Péter>,<1,Pál>,<2,Péter>,<2,Pál>}

{1,2}x {Péter}x { a , b} = {<1,Péter,a><1,Péter,b><2,Péter,a><2,Péter,b>}

A Descartes-szorzat által kapott eredmény halmaz elemeinek száma megegyezik a kiinduló halmazok elemszámainak szorzatával.
|A x B| = |A|·|B|

A **rendezett n**-esben a halmazokkal ellentétben nagyon szigorú a sorrend.

<1,2> például koordináta n-es nem mindegy, hogy melyik szám jelöli az x pontot és melyik az y pontot a koordináta rendszerben.

A halmazok a programozásban nem feldolgozhatóak.

6.4 Bizonyítások

6.4.1 A kvantorokat eltüntető természetes levezetés szabályai

11. $\dfrac{K \vdash P(x')}{K \vdash \underset{x}{\forall} P(x)}$ **12.** $\dfrac{K, P(t) \vdash A}{K, \underset{x}{\forall} P(x) \vdash A}$

13. $\dfrac{K \vdash P(t)}{K \vdash \underset{x}{\exists} P(x)}$ **14.** $\dfrac{K, P(x') \vdash A}{K, \underset{x}{\exists} P(x) \vdash A}$

A szabályok jellemzése:
A négy szabályban előfordul **x’** és **t**. A **t** egy tetszőlegesen összetett term az-az egy tetszőleges kifejezés. Az **x’** az egy olyan új konstans, amelyről semmilyen ismeretünk sincs. Az **x’** helyére nem írható 0, 1, toll. Amikor tudom azt, hogy $\underset{x}{\forall}$ **P(x)** ez azt jelenti, hogy **x**

helyére bármit helyettesítve P(x) igaz, így **x** helyére **bármilyen termet helyettesíthetek** akár **x’** is.
Ha azt kell bizonyítani, hogy $\forall_{\mathbf{x}}$ **P(x)** az ugyanaz ahol P(x) egy szabad változó**,** ezért azt a trükköt alkalmazzuk, hogy elhagyjuk a kvantort **x** most már konkrét konstans lehet.

x’: tetszőleges defix / arbitrary butfixed /

Fontos! $\mathbf{x \in \{y \mid P(y)\} \Leftrightarrow P(x)}$

Példaként bizonyítsuk be a következő tételt:
$\mathbf{A \subseteq A \cup B}$

$\vdash \mathbf{A \subseteq A \cup B}$ **-** bármilyen általam definiált jel eltüntethető a definíciójával

$$\vdash \forall_{\mathbf{a}} \; \mathbf{a \in A \cup B}$$
$$\mathbf{a \in A}$$

11. szabály alkalmazása
$\vdash \forall_{\mathbf{a}} \quad \mathbf{(a \in A \cup B)}$

1. szabály alkalmazása
$\vdash \mathbf{a' \in A \Rightarrow a' \in A \cup B}$

def: $\mathbf{a' \in A} \;\vdash \mathbf{a' \in A \cup B}$

$\mathbf{a' \in A} \;\vdash \mathbf{a' \in \{\, a \mid a \in A \vee a \in B\}_{a}}$

$\mathbf{a' \in A} \;\vdash \mathbf{a' \in A \vee a' \in B}$

6. szabály alkalmazása

$\underline{\mathbf{a' \in A}}\mathbf{,\ a \notin B} \vdash \underline{\mathbf{a' \in A}}$ ✓

Példa bizonyítsuk természetes levezetéssel:
$\vdash \mathbf{A \Rightarrow \neg A \Leftrightarrow \neg A}$

$$\mathbf{A} \qquad\qquad \mathbf{A}$$
$$\mathbf{A \Rightarrow \neg A , A \vdash \ldots; A \Rightarrow \neg A , A \vdash \ldots \Rightarrow \neg A} \checkmark$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\mathbf{A} \qquad\qquad \mathbf{A}$$
$$\mathbf{A \Rightarrow \neg A , A \vdash \ldots \; ; A \Rightarrow \neg A , A \vdash \ldots} \qquad\qquad \mathbf{\neg A, A \vdash \neg A} \checkmark$$

7. $\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$ **1.** $\overline{\qquad\qquad\qquad}$

$$\mathbf{A \Rightarrow \neg A \vdash \neg A} \qquad ; \qquad \mathbf{\neg A \vdash A \Rightarrow \neg A}$$

9. $\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

$$\vdash \mathbf{A \Rightarrow \neg A \Leftrightarrow \neg A}$$

6.4.2 Szöveges bizonyítás magyarul

TÉTEL: $\mathbf{A \Rightarrow \neg A \Leftrightarrow \neg A}$
Bizonyítás:
B→J: Tegyük fel **A ⇒ ¬A Igaz**
Megmutatjuk, hogy **¬A igaz**, mivel ez nehéz e-helyett indirekt felteszem, hogy **A igaz**.
Megmutatom, hogy ez a feltevés ellentmondáshoz vezet.
Mivel már feltettem, hogy **A ⇒ ¬A és A igaz** ezért Modus Ponens segítségével következik, hogy **¬A is igaz** csak hogy ez ellentmondás, mert már feltettem, hogy A igaz.
J → B: Tegyük fel, hogy **¬A igaz** megmutatom, hogy **A ⇒ ¬A Igaz.** Felteszem, hogy **A igaz** ez valóban így van, hiszen korábban már feltettem, hogy **¬A igaz.**

6.4.3 Szöveges bizonyítás angolul

PROVE / bizonyít /

PROOF: / Bizonyítás /
The crem: A ⇒ ¬A ⇔ ¬A
Left to the right:
We assume that **A ⇒ ¬A is true**
We show that **¬A is true**
In stead of this we indirectly assume, a we show that this assumtion leads to a contradiction.
We have already assumedt that **A ⇒ ¬A** is true and A torm this by modus ponens we know that **¬A** but this is a contradiction.

A bizonyítás szerkezete nyelvtől függetlenül ugyanaz marad!