Szimbolikus integrálás

Differenciáltest

Legyen K egy nulla karakterisztikájú test, amelyen adott egy $f \to f'$ leképezése K-nak önmagába az alábbi két tulajdonsággal:

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + g'f$$

Ekkor az $f \to f'$ leképezést *differenciáloperátornak vagy deriváltnak* nevezzük, K-t pedig differenciáltestnek. Ha $f' = g$ akkor azt írjuk, hogy $f = \int g$. A

$$C = \left\{ c \in K \,:\, c' = 0 \right\}$$

halmaz a *konstansok részteste* K-ban.

Egy $0 \neq f \in K$ elem *logaritmikus deriváltján* az $\frac{f}{f'}$-et értjük.

Tétel. A deriválás szokásos tulajdonságai teljesülnek:

(1)$0' = 1' = 0$,

(2)

$$(af + bg)' = af' + bg',$$

ahol $f, g \in K$, $a, b \in C$,

(3) ha $g \neq 0$, f tetszőleges, akkor

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2},$$

(4) $(f^n)' = nf'f^{n-1}$, ha $0 \neq f \in K$ és $n \in \mathbf{Z}$,

(5) $\int fg' = fg - \int gf'$, ha $f, g \in K$.

Megjegyzés. Legyen C tetszőleges nulla karakterisztikájú test és $K = C(x)$ a szokásos differenciálással, ekkor $\frac{1}{x}$ nem deriváltja semminek.

Differenciáltest bővítése

Legyen L egy differenciáltest, $K \subset L$ pedig egy részteste L-nek. Ha a differenciálás nem vezet ki K-ból, akkor azt mondjuk, hogy K egy *differenciálrészteste* L-nek, illetve hogy L *differenciálbővítése* K-nek.

Ha valamely $f, g \in L$-re $f' = \frac{g'}{g}$, azaz ha f deriváltja g logaritmikus deriváltja, akkor azt írjuk, hogy $f = \log g$. Ha ilyen g létezik, akkor azt mondjuk, hogy f *logaritmikus* K *felett*.

Példák.

$$\int \frac{1}{x^2-2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\log(x-\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{4}\log(x+\sqrt{2})$$

azaz a $\mathbf{Q}(\sqrt{2})(x, \log(x-\sqrt{2}, \log(x+\sqrt{2})$ differenciáltestben van.

$$\int \frac{1}{x^3+x} = \log(x) - \frac{1}{2}\log(x+i) - \frac{1}{2}\log(x-i),$$

$$\int \frac{1}{x^3+x} = \log(x) - \frac{1}{2}\log(x^2+1),$$

ekkor azt integrál tekinthető a

$$\mathbf{Q}(x, \log(x), \log(x^2+1)$$

elemének is és

$$Q(i)(x, \log(x), \log(x-i), \log(x+i))$$

elemének is.

Hermite módszere

Legyen K egy nulla karakterisztikájú test, $f, g \in K[x]$ nemnulla és relatí prím polinomok. Az $\int \frac{f}{g}$ integrál kiszámításához Hermite módszerével olyan $a, b, c, d \in K[x]$ polinomokat találhatunk, amelyekre

$$\int \frac{f}{g} = \frac{c}{d} + \int \frac{a}{b},$$

ahol $\deg a < \deg b$ és b négyzetmentes főpolinom. A $\frac{c}{d}$ racionálisfüggvényt az integrál *racionális részének*,az $\int \frac{a}{b}$ kifejezést pedig az integrál logaritmikus részének nevezzük.

Maradékos osztással kapjuk, hogy :

$$f = pg + h \rightarrow \frac{f}{g} = p + \frac{h}{g},$$

ahol $\deg h < \deg g$.

A g polinomot négyzetmentes és páronként relatí prím $g_1, g_2 \ldots g_m \in K[x]$ főpolinomok szorzatára bontjuk, ahol $g_m \neq 1$ és

$$g = g_1 g_2^2 \cdots g_m^m.$$

Parciális törtekre bontás után kapjuk, hogy

$$\frac{h}{g} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{i} \frac{h_{i,j}}{g_i^j}.$$

A **Hermite-redukció** a következő lépések ismétlése: ha $j > 1$, akkor az $\int \frac{h_{i,j}}{g_i^j}$ integrált egy racionális függvény és egy eredetihez hasonló alakú integrál összegére redukáljuk, ahol j egyel kisebb.

Mivel g_i négyzetmentes a $\gcd(g_i, g_i') = 1$. A bővített euklideszi algoritmussal kaphatunk olyan $s, t \in K[x]$ polinomokat, amelyekre

$$sg_i + tg_i' = h_{i,j}$$

és $\deg s, \deg t < \deg g_i$.

$$\int \frac{h_{i,j}}{g_i^j} = \int \frac{t g_i'}{g_i^j} + \int \frac{s}{g_i^{j-1}} =$$

$$= \frac{-t}{(j-1)g_i^{j-1}} + \int \frac{t'}{(j-1)g_i^{j-1}} + \int \frac{s}{g_i^{j-1}} =$$

$$= \frac{-t}{(j-1)g_i^{j-1}} + \int \frac{s + \frac{t'}{(j-1)}}{g_i^{j-1}}.$$