

Fejezetek a számelméletből  
c. tantárgy tematikája és kollokviumi tételei matematikatanári MA-n  
a főiskola utáni 2-3 féléves képzésben

Számelméleti alapismeretek (egyéni ismétlés)

Elemi számelméleti alapfogalmak. A kongruencia fogalma és tulajdonságai, maradékosztályok. A  $(\mathbb{Z}/(m), +, \cdot)$  gyűrű, illetve  $(\mathbb{Z}/(p), +, \cdot)$  test. Wilson-tétel. Az Euler féle  $\phi$  függvény. Euler—Fermat-tétel. A kis Fermat-tétel, pszeudoprím számok. Nevezetes multiplikatív és additív számelméleti függvények. Tökéletes számok. Lineáris diofantikus egyenletek. Pitagorászi számhármások. Lineáris kongruencia, illetve lineáris kongruenciarendszer.

Kollokviumi tételek

1. Magasabb fokú algebrai kongruenciák. Prímmodulusú kongruenciák. Fokszám tétel, König—Rados-tétel. Binom kongruenciák, rend, illetve primitív kongruencia gyök. Index.
2. Binom kongruenciák megoldása index-táblázattal. Kvadratikus kongruenciák  $(\text{mod } p)$ . Euler-lemma, Gauss-lemma, Legendre-szimbólum. Gauss-féle reciprocitási tétel. A Jacobi-szimbólum.
3. Tételek a prímszámelméletből:  $\sum \frac{1}{p}$  divergenciája,  $\pi(x)$  becslése,  $p_n$  becslése és a Bertrand posztulátum.
4. Dirichlet tétele (bizonyítás spec. esetekben). Sejtések prímszámokkal kapcsolatban. Prímtesztek, faktorizálási algoritmusok.
5. A Dirichlet-féle konvolúciós szorzás. Inverziós formulák. A  $d$  számelméleti függvény átlagérték függvénye. Dirichlet sor.
6. Diofantikus egyenletek megoldhatósága. A Fermat-féle problémakör: a „descente infine” módszer bemutatása az  $x^4 + y^4 = z^4$  egyenlet kapcsán, a Wiles-Taylor tétel. Elliptikus görbék.
7. Diofantikus approximáció, Dirichlet-tétel, Hurwitz-tétel, Pell-egyenlet, lánc törtek.
8. Algebrai és transzcendens számok. Roth-tétel, Thue - Siegel - tétel. Az algebrai számelmélet elemei, norma, nyom, diszkrimináns fogalma.
9. Euklédészi kvadratikus testek. Számelmélet a Gauss-egészek gyűrűjében. Az  $x^2 + y^2 = n$  diofantoszi egyenlet.
10. A geometriai számelmélet elemei. A Minkovszki - tétel és néhány alkalmazása.

Egyéni feldolgozással:

11. Lineáris rekurzív sorozatok. A Fibonacci és a Lucas számok aritmetikai tulajdonságai. Az  $x^2 - 5y^2 = \pm 4$  diofantoszi egyenlet megoldása.

Irodalom:

- Kiss Péter - Mátyás Ferenc: A számelmélet elemei, Líceum Kiadó, Eger, 1996.
- Freud Róbert - Gyarmati Edit: Számelmélet, Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.

Eger, 2013. 09. 03.

  
Dr. Mátyás Ferenc