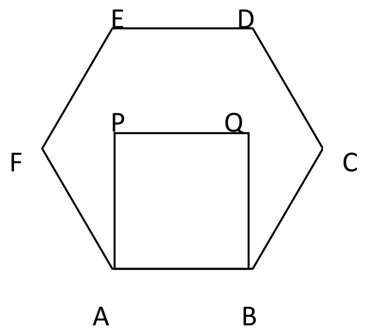
Versenyfeladatok

Beadandó: kiválasztott 15 feladat kidolgozva

1. Tudjuk, hogy $a + b + c = 7$, valamint $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{7}{10}$, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$. Mennyi az értéke a következő kifejezésnek: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = ?$
2. Hozza egyszerűbb alakra a következő algebrai törtet: $\frac{x^8+x^6+x^4+x^2+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}$!
3. Határozza meg a $19^{99} + 81^{99}$ szám utolsó két számjegyét!
4. Mely n természetes számokra lesz az $n^3 - n^2 + n - 1$ szám értéke prím?
5. Két párhuzamos egyenes mindegyikén prímszám számú pontot jelöltünk meg. A megjelölt pontok, mint csúcsok által meghatározott összes négyszög száma kétszerese a megjelölt pontok által meghatározott háromszögek számának. Hány pontot jelöltünk meg az egyeneseken?
6. A sík mely *(x; y)* pontjaira teljesül, hogy $log_y x < 1$?
7. Adott egy háromszög három magassága: m_a, m_b és m_c szakaszok. Szerkessze meg a háromszöget!
8. Egy kockát az egyik testátló egyenese körül 60°-kal elforgatjuk. Jellemezzük az eredeti és az elforgatott kocka közös részét alkotó testet! Hány csúcsa, éle, lapja van, milyen sokszögek a lapjai? Tudjuk, hogy a kocka éle 2 egység, számítsuk ki a kapott test éleinek a hosszát!
9. Határozza meg az $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét a valós számok halmazán!
10. Egy kalapban 2002 cédula van az 1, 2, 3, …, 2002 számokkal. Hányat kell becsukott szemmel kihúznunk, hogy biztosan legyen köztük két olyan szám, amelyek összege osztható 5-tel?
11. Hány téglalapot lehet kijelölni egy 6x10-es négyzetrácsban úgy, hogy csúcsai rácspontok, oldalai pedig rács egyenesek legyenek?
12. A bergengóc nyelv nagyon különleges: minden szava 6 betűs, az A, B, E, L, R, S betűk valamilyen sorba rendezésével kapható. Minden szóban minden betű csak egyszer szerepel. A betűk minden lehetséges sorrendje értelmes szót alkot, melyek mindegyike szerepel a Bergengóc Értelmező Szótárban. Melyik a szótár 537-edik szava? (a betűk fenti sorrendje egyben a bergengóc ábécé rendje)
13. Egy vasgömb higanyban úszik. Vizet öntünk a higany fölé úgy, hogy a gömböt ellepje. Süllyed-e, emelkedik-e, vagy ugyanazon mélységben marad a gömb? Számítsuk ki a gömb higanyszint feletti részének térfogatát! (a higany sűrűsége 13,6; a vasé 7,8; a vízé 1 ugyanabban a mértékegységben)
14. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:
    $8(x^4 + y^4) - 4(x^2 + y^2) + 1 = 0$!
15. Igazolja, hogy $log_5 6 + log_6 7 + log_7 8 + log_8 5 > 4$!
16. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán: $\frac{2}{x-2} > \frac{2x+3}{x^2-3x}$!
17. Hozza egyszerűbb alakra a $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x \cdot \cos 16x$ kifejezést!

18. Adott a síkon 10 általános helyzetű egyenes (nincs köztük két párhuzamos, és bármely metszésponton csak két egyenes halad át). A metszéspontok az egyeneseket szakaszokra és félegyenesekre (nevezzük ezeket egyenes daraboknak) bontják. Véletlenszerűen kiválasztunk a keletkezett egyenes darabok közül kettőt. Mi a valószínűsége, hogy a kiválasztott két egyenes darab azonos típusú (azaz mindkettő szakasz, vagy mindkettő félegyenes)?
19. Egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán véletlenszerűen kiválasztunk egy-egy pontot. Mi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott pontok távolsága kisebb, mint $\frac{\sqrt{5}}{2}$?
20. Egy matematikaórán a tanár felírt egy pozitív egész számot a táblára. Az egyik diák így szólt: a szám osztható 31-gyel. A második diák azt mondta, a szám osztható 30-cal. A harmadik diák pedig azt, hogy osztható 29-cel. Ezt a felsorolást addig folytatták, míg a harmincadik diák is megszólalt: a szám osztható 2-vel. A tanár ezután közölte, hogy az elhangzott állítások közül csak kettő volt hamis, és ezek egymás után hangzottak el. Melyik volt a két hamis állítás?
21. Határozzuk meg az összes olyan $z\epsilon\mathbb{Z}$ számot, amelyre a $z^2+19z+95$ kifejezés négyzetszámot ad!
22. Az $f(x)=ax^2+bx+c$ másodfokú függvényre $f(a)=b, f(b)=c, f(c)=a$ teljesül. Mennyi lehet ekkor a^3+b^2+c értéke?
23. Az $x\epsilon\mathbb{R}$ számról tudjuk, hogy $x+\frac{1}{x}=4$. Számítsuk ki $\frac{x^2}{x^4+1}+\frac{1}{x^2}+x^2$ értékét!
24. Az ábrán látható módon helyezzük el egy ABCDEF szabályos egységoldalú hatszögben a PQBA egységoldalú négyzetet. Gördítsük körbe a hatszög belső felületén a négyzetet a következő módon: először pozitív irányban forgassuk a négyzetet B pont körül addig, amíg a Q pont a hatszög C csúcsába ér. Ezután C körül forgassuk tovább a négyzetet pozitív irányban addig, míg P egybeesik D-vel. Folytassuk tovább ezt az eljárást egészen addig, amíg a négyzet a hatodik forgatás után visszatér az AB oldalhoz. Milyen hosszú utat jár be ezalatt P pont?



25. Oldjuk meg a valós számok halmazán az $(5^x-2^{x-2})^2+2\lg(5^x+2^{x-2})=x$ egyenletet!
26. Oldjuk meg a valós számok halmazán a $\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}+\frac{1}{\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}}=\frac{5}{2}$

egyenletet!

27. Legyen tetszőleges $x \epsilon \mathbb{R}$ esetén $f(x) = \frac{4^x}{4^x+2}$, határozzuk meg az $f(x) + f(y)$ összeget, ha $x + y = 1$! Ezután határozzuk meg $f\left(\frac{1}{2010}\right) + f\left(\frac{2}{2010}\right) + f\left(\frac{3}{2010}\right) + \cdots + f(\frac{2009}{2010})$ összeg pontos értékét!
28. Adja meg az összes olyan háromszöget, amelynek oldalai közvetlen egymást követő páros egész számok, valamint az egyik belső szöge kétszer akkora, mint egy másik belső szöge!
29. Egy m sorból és n oszlopból álló, téglalap alakú táblázat minden mezőjébe egy-egy számot írunk oly módon, hogy az egyes sorokba írt számok egy-egy számtani sorozat egymást követő tagjai, hasonlóképpen az egyes oszlopokba írt számok is egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Mennyi a táblázatba írt számok összege, ha téglalap négy csúcsába írt számok összege 2008?
30. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójára és az AC befogójára kifelé megrajzoltuk az ABDE és ACFG négyzeteket. Jelölje M az EC és BG szakaszok metszéspontját! Határozza meg az ABC háromszög oldalainak az M pontból mért látószögét!